Sobre Pontos Fixos e Contrações Fracas

Rafael Romero [1]
Wenderson Marques Ferreira[2]
Eder Marinho Martins[3]

Resumo: Um dos clássicos resultados sobre pontos fixos é o

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja M um Espaço Métrico completo. Então toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo.*

O resultado anterior não garante a existência de um ponto fixo quando a função considerada é uma contração fraca, definida como:

Definição 1 *Uma função $f : M \to M$ em que M é um espaço métrico é dita contração fraca se*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ \forall \ x, y \in M. \tag{1}$$

Para tais funções, diferentemente da contração usual, não é possível exibir uma constante $c < 1$ que quando multiplicada por $d(x, y)$ satisfaça a inequação.

A pergunta a ser feita é:

Será que podemos obter hipóteses suficientes para as quais conseguimos garantir a existência de um único ponto fixo para contrações fracas?

Essa pergunta é o ponto de partida deste trabalho. Nossas fontes de pesquisa foram uma série de artigos publicados a partir da segunda metade do século passado. A seguir veremos os diferentes resultados que estudamos e tentamos apresentar a "evolução" que cada um deles representou em relação ao anterior para a obtenção de resultados de existência e unicidade de ponto fixo. Valendo ressaltar que todos os resultados envolvem aplicações que são contração fraca.

- **O resultado de Rakotch:** A definição de Rakotch [1] para contração fraca decorre de mudar a constante $0 \leq c < 1$ no Teorema de Banach por uma função positiva $\alpha(d(x, y)) < 1$ monótona decrescente em que $\sup \alpha = 1$.

- **O resultado de Boyd-Wong:** Neste caso as aplicações $f : M \to M$ consideradas em [2] satisfazem a seguinte condição:

  $$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)) \tag{2}$$

  em que $\psi : \overline{P} \to [0, \infty)$ com $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

[1] Aluno de Matemática Bacharelado, Universidade Federal de Ouro Preto, rafael.romero@aluno.ufop.edu.br
[2] Professor orientador, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, wmf@ufop.edu.br
[3] Professor coorientador, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, eder@ufop.edu.br

- **O resultado de Vittorino Pata:** Para estabelecer seu resultado, Pata considera funções f tais que dado x_0 pertencente ao seu domínio, satisfaçam

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1 + d(x,x_0) + d(y,x_0)]^{\beta}, \qquad (3)$$

em que $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \in [0,\alpha]$ são constantes fixadas e $\epsilon \in [0,1]$.

Considerando-se os resultados apresentados, outra pergunta surge:

Será que os resultados apresentados são equivalentes? Em caso afirmativo, em que condições?

As respostas a esta pergunta foram o segundo objetivo alcançado neste trabalho.

1. Se considerarmos o espaço de domínio das funções f limitado, os teoremas apresentados em [2] e [4] coincidem.

2. Para Espaços Métricos Compactos, a definição de contração fraca (1) coincide com as noções de contração (2) e (3).

3. Para domínios ilimitados não temos as equivalências anteriores. Um exemplo simples é a função real $f : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ dada por

$$f(x) = -2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}$$

cujo único ponto fixo ($x = 1$) é garantido pelos resultados de [4], mas não é garantido através da teoria desenvolvida em [2].

4. A função apresentada em [2] aperfeiçoa o resultado visto em [1]. É possível observar isso na função

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2};\ x \in [0,1] \\ x - 1;\ x \in \{2,3,4,...\} \end{cases}$$

com a métrica dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|;\ x,y \in [0,1] \\ x + y;\ x \in \{2,3,4,...\}\ ou\ y \in \{2,3,4,...\} \end{cases} .$$

Referências

[1] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459-465.

[2] D. W. Boyd and J. S. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 458–464.

[3] L. Fornari and V. Pata, *A Note On Weak Contractions In Compact Metric Spaces*, (2019).

[4] V. Pata, *A fixed point theorem in metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. 10 (2011), 299–305.